集合と命題

数学と医療・第 1 回

数学・橋本貴宏

2024 年 9 月 4 日 1 限

本日の授業では

- この授業のやり方を説明する
- 「集合」は数学の基礎である
- 数学の主張は「命題」で表される．命題の真偽を示すために，「論理」が必要である

リベラルアーツとは

「自由」な「学芸」

古代から中世のヨーロッパでは「自由七科」として,

「文法」「修辞学」「論理学」と

「算術」「幾何学」「天文学」「音楽」

が学ばれていた.

- 数学と自由

SO: 社会における医療の役割の理解

SO-02: 疫学・医学統計

S0-02-01: 保健統計

S0-02-02: 疫学

S0-02-03: データ解析と統計手法

(1) 尺度について説明できる。
(2) データの分布について説明できる。
(3) 正規分布の母平均の信頼区間について説明できる。
(4) 相関分析、平均と割合の検定等を実現できる。
(5) 多変量解析の意義を理解している。

講義計画

回	日	講義タイトル	内容
1	9/4	集合と命題	数学の基礎であり「論理的思考」の基盤
2	9/11	確率	「ベイズの定理」は医療現場でも使われます
3	9/18	確率変数と確率分布	確率変数, 期待値, 分散
4	9/25	離散型確率分布	二項分布, ポアソン分布, 二次元確率分布
5	10/2	連続型確率分布	正規分布
6	10/9	母集団と標本	標本抽出と標本平均・不偏分散
7	10/16	標本分布	χ^2 分布, $\boldsymbol{t}$ 分布, $\boldsymbol{F}$ 分布
8	10/30	行列	行列の定義, 行列の演算
9	11/6	行列の応用	連立一次方程式, データの分析への応用
10	11/13	微分方程式	変数分離法, 線形微分方程式
11	11/20	薬の吸収	薬物動態学, 血中濃度
12	11/27	感染症モデル	SIR モデル, シミュレーション
13	12/4	医療のための数学	講義のまとめ

授業の進め方

参考資料

- 確率統計「医療系のための入門統計」
- 行列「行列入門」（文科省教材）
- 微分方程式「微分方程式で数学モデルを作ろう」

受講のしかた

- 授業の前には**必ず** AIDLE-K を確認する．重要なことは「アナウンスメント」からメール配信されます．
- 定期試験がないので，毎回「ちゃんと」受講する．
- 提出物を「遅れず」「欠かさず」提出する

評価について

シラバスの通り … 変更がある場合は告知する。

	割合	方法・コメント
演習課題	**70%**	毎回の課題と AIDLE-K での取り組み
レポート	**30%**	全講義終了後にレポート

演習課題

- 演習問題の解答を AIDLE-K から提出
- 「フィードバック」から振り返りを提出する
- AIDLE-K の小テスト

レポート

課題：医学・医療において数学が応用されている研究・事例を調査する。

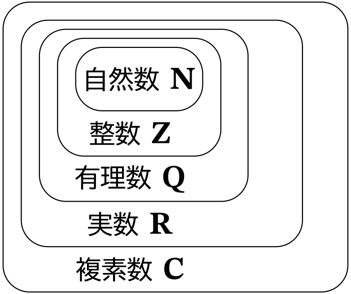
「ある条件を満たすものの全体で, その条件を満たすか否かがはっきりしているもの」を**集合**と定義する. 集合を構成している個々のものを**元** (要素) という. a が集合 A の元であることを, $a \in A$ と書き, a が集合 A の元でないことを $a \notin A$ と書き, 起こるのはこの 2 つのうちのいずれかである.

例 1-1

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$$

$n(A) = 10$: 集合の元の個数.

数の集合



自然数: $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \cdots$. ものの個数

整数: 「自然数」,「自然数にマイナス符号をつけたもの」に $\mathbf{0}$ を付け加えたもの

有理数: 自然数 $\boldsymbol{n}$, 整数 $\boldsymbol{m}$ を用いて $\dfrac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$ と表される数

無理数: 有理数で無い数, すなわち整数の比で表せない数.

有理数と**無理数**を合わせたものを**実数という**

実数より広い概念として**複素数**があり, 負の数の平方根を表すのに用いられる. この授業では特に断りの無い限り実数の範囲で考えていく.

部分集合

- 2 つの集合 A と B があり, A の元が必ず B の元になっているとき, A は B の部分集合であるといい, $A \subset B$ で表す.
- 集合を記述するとき,

$$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 100\}$$

を外延的記法といい,

$$A = \{n \mid n \text{ は } 100 \text{ 以下の自然数の偶数}\}$$

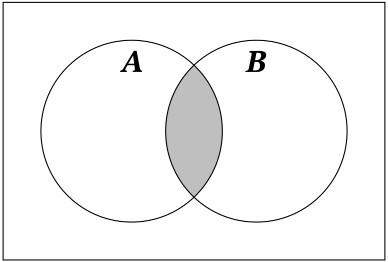
を内包的記法という.

集合の演算

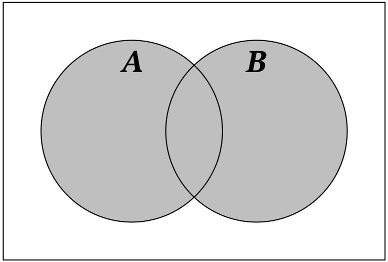
- 積集合 (intersection)　$A \cap B$
- 和集合 (union)　$A \cup B$
- 全体集合 (universal)　考えるどの集合も含む集合 U を**全体集合**という．$A \subset U$ である．
- 補集合 (complementary)　$\overline{A}$: U に属するが A に属さない．A^c とも書く
- 空集合 (empty)　$\emptyset$: 元が存在しない

ベン図 (p.26,27)

$\boldsymbol{A \cap B}$



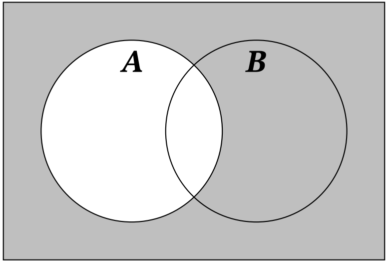
$\boldsymbol{A \cup B}$



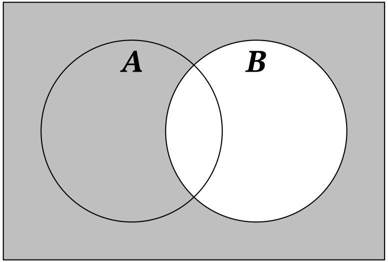
- $\overline{(\overline{\boldsymbol{A}})} = \boldsymbol{A}$
- ド・モルガンの法則

$$\overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}, \quad \overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$$

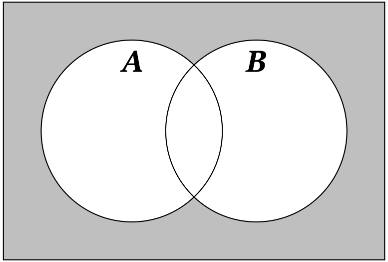
ド・モルガンの法則 (p.27)



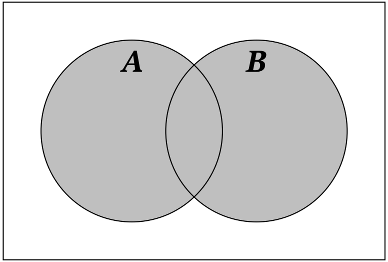
$\overline{A}$



$\overline{B}$



$\overline{A} \cap \overline{B}$



$A \cup B$

命題

その内容が真であるか偽であるかが明確に定まっている文章を**命題**と呼ぶ．$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ などの小文字のアルファベットで表す．

例 「2 は素数である」… 「真」の命題
「素数は奇数である」… 「偽」の命題

命題 $\boldsymbol{p}$ が真のとき，$\boldsymbol{p}$ の**真理値**は $\boldsymbol{T}$ (true) であるといい，$\boldsymbol{p}$ が偽のとき，$\boldsymbol{p}$ の真理値は $\boldsymbol{F}$ (false) であるという．$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{F}$ の代わりに $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ を使うこともある．

命題の例

Q1 以下の文は命題であるか？

(1) $\sin x + \cos x = 0$ をみたす実数 x は無理数である.

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の解を求めよ.

(3) ふたつの有理数の積は有理数である.

(4) 11 は偶数である.

(5) 試験に合格するといいな.

(6) ふたつの無理数の積は無理数だろうか.

論理記号

命題を組み合わせる部品である. **単一命題** $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ と論理記号を組み合わせることによって**合成命題**を作ることができる.

(1) 否定
命題 $\boldsymbol{p}$ に対し, **否定命題**「$\boldsymbol{p}$ でない」を $\neg\boldsymbol{p}$ で表す. $\boldsymbol{p}$ が偽のときに限り, $\neg\boldsymbol{p}$ は真となる.

(2) 論理和 (選言)
2 つの命題 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ に対して, 命題「$\boldsymbol{p}$ または $\boldsymbol{q}$」を**論理和**といい, $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ で表す. $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ がともに偽であるときに限り, $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ は偽となる.

論理記号 (つづき)

(3) 論理積 (連言)

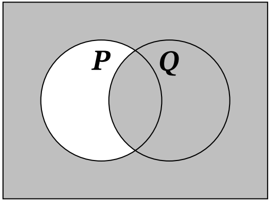
2 つの命題 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ に対して, 命題「$\boldsymbol{p}$ かつ $\boldsymbol{q}$」を**論理積**といい, $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ で表す. $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ がともに真であるときに限り, $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ は真となる.

(4) 含意

2 つの命題 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ に対して, 命題「$\boldsymbol{p}$ ならば $\boldsymbol{q}$」を**含意**といい, $\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$ で表す. $\boldsymbol{p}$ が真で, $\boldsymbol{q}$ が偽のときに限り, $\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$ は偽となる.

命題 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ が真である集合を $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ とする. 命題 $\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$ が真である集合は右の図の通りである.

記号で表すと $\overline{\boldsymbol{P}} \cup \boldsymbol{Q}$.



真理値表

命題 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ の真偽により, 命題 $\neg \boldsymbol{p}$ (否定), $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ (選言), $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ (連言), $\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$ (含意) の真偽が決まる. これを次のような**真理値表**で表すことができる.

$\boldsymbol{p}$	$\neg \boldsymbol{p}$
$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$
$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$

同値な命題

$\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$ かつ $\boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{p}$ が成り立つとき, 2 つの命題 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ は**同値**であるといい, $\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{q}$ と書く. また, 2 つの命題が同値であるということは, 真理値表が一致するということでもある.

(例) $\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$, $(\neg \boldsymbol{p}) \vee \boldsymbol{q}$ という 2 つの合成命題について, 真理値表を作ってみる. これをみると, $\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q} \equiv (\neg \boldsymbol{p}) \vee \boldsymbol{q}$ であることがわかる.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{p}$	$(\neg \boldsymbol{p}) \vee \boldsymbol{q}$
$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$

逆・裏・対偶

命題 $p \Rightarrow q$ において，仮定 p と結論 q を入れ替えた命題 $q \Rightarrow p$ をもとの命題の**逆**という． また，命題 $(\neg p) \Rightarrow \neg q$, $(\neg q) \Rightarrow \neg p$ をそれぞれ，もとの命題の**裏**，**対偶**という．

$$\begin{tikzcd}
p \Rightarrow q \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{逆}"] \arrow[dd, leftrightarrow, "\text{裏}"'] & & q \Rightarrow p \arrow[dd, leftrightarrow, "\text{裏}"] \\
& \text{対偶} \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(\neg p) \Rightarrow \neg q \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{逆}"'] & & (\neg q) \Rightarrow \neg p
\end{tikzcd}$$

命題とその命題の対偶は同値である．

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$q \Rightarrow p$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

ド・モルガンの法則（命題版）

$\neg(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \equiv (\neg \boldsymbol{p}) \wedge (\neg \boldsymbol{q}) \cdots$ ①, $\neg(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \equiv (\neg \boldsymbol{p}) \vee (\neg \boldsymbol{q}) \cdots$ ②

① は, 次のようにして示せる.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{p}$	$\neg \boldsymbol{q}$	$\neg(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$	$(\neg \boldsymbol{p}) \wedge (\neg \boldsymbol{q})$
$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$

本日の課題 (その 1)

真理値表を書くことにより, ② を示せ.

3 つ以上の場合は？

$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}$ や $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}$ の否定, それらを一般化した

全称命題: すべての $\boldsymbol{x}$ について $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ が成立する.
存在命題: $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ が成り立つ $\boldsymbol{x}$ が存在する.

の否定を考える. 数学では存在命題は「ある $\boldsymbol{x}$ について $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ が成立する」と表現することが多い. これらの否定命題は

全称命題の否定: ある $\boldsymbol{x}$ について $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ が成立しない.
存在命題に否定: すべての $\boldsymbol{x}$ について $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ が成立しない.

となる. つまり「すべて $\iff$ ある」の入れ替えをして後半の命題 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ を否定すれば良い.

※ この議論は統計学における**分散分析**で用いられる.

推論 (その1)

根拠となる命題から論理的法則に従って他の命題を導くことを演繹的推論という.

(1) 前件肯定

$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$ から $\boldsymbol{q}$ を導く. モーダス・ポーネンスとよばれる. 次のように表される.

$$\frac{\boldsymbol{p},\ \ \boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}}{\boldsymbol{q}}$$

例：「暴風警報が発令されれば, 大学は休校になる」と「暴風警報が発令された」より「大学は休校になる」が導かれる.

※ 「後件肯定」は正しくない推論である. 「暴風警報が発令されれば, 大学は休校になる」と「大学が休校になった」より「暴風警報が発令された」は真とはいえない.

推論 (その2)

(2) 後件否定 $\dfrac{p \Rightarrow q,\ \neg q}{p}$

例：「爬虫類ならば冬眠する」と「カラスは冬眠しない」より「カラスは爬虫類でない」が導かれる.

※ こちらも「前件否定」は正しくない推論である. 「爬虫類ならば冬眠する」と「クマは爬虫類でない」より「クマは冬眠しない」は真とはいえない.

(3) 三段論法 $\dfrac{p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r}{p \Rightarrow q}$

(4) 背理法 $\dfrac{\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)}{p}$

$q \wedge \neg q$ とは q と $\neg q$ が同時に成り立つことであり, **矛盾**という.

証明の方法

- **背理法** $\cdots$ $\boldsymbol{p}$ が偽であると仮定して矛盾が導かれるならば, $\boldsymbol{p}$ が真であることが示される

  「統計的仮説検定」

  「もし病気でないと仮定すると, このような検査データが出る確率は $\mathbf{0.8}\%$ である (非常に小さい)」➡ 病気であると結論付ける

- **数学的帰納法** $\cdots$ 自然数 $\boldsymbol{n}$ に関する $\boldsymbol{P(n)}$ について

  (i) $\boldsymbol{P(1)}$ が真である

  (ii) すべての自然数に対して, $\boldsymbol{P(k)}$ が真であるとき, $\boldsymbol{P(k+1)}$ が真である

  が示されれれれば, すべての自然数 $\boldsymbol{n}$ に対して $\boldsymbol{P(n)}$ が真である

背理法の例

「a^2 が 3 の倍数ならば a は 3 の倍数」が成り立つとして，「$\sqrt{3}$ は無理数である」を証明する.

(証) $\sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると, 互いに素な自然数 m, n を用いて $\sqrt{3} = \dfrac{m}{n}$ と表せる. 分母をはらって両辺を 2 乗すると $3n^2 = m^2$ となる.

m^2 が 3 の倍数となるので m は 3 の倍数である. そこで $k \in \mathbf{N}$ として $m = 3k$ とおく. $3n^2 = 9k^2$ より $n^2 = 3k^2$ となる. n^2 が 3 の倍数となるので n も 3 の倍数となる.

m, n がともに 3 の倍数となり互いに素であることと矛盾する. ゆえに $\sqrt{3}$ は無理数である.

仮説検定の例

高血圧症の 8 名に, ある食事療法を 1 週間続けて, 食事療法をする前と後の収縮期血圧 (mmHg) を測定したところ, 次のデータが得られた。

食事療法前	152	180	157	164	174	165	173	169
食事療法後	142	168	149	158	176	163	166	170

この食事療法の前後で血圧に変化があったといえるかどうか？

仮説を立てて検証する

帰無仮説：食事療法の前後で収縮期血圧に差がない
対立仮説：食事療法の前後で収縮期血圧に差がある

この仮説を「棄却」するかどうかを, データとそのデータが従う確率分布から判断する

数学的帰納法の例

k を自然数とするとき，$e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k \quad (x > 0)$

(証) $f_k(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k\right)$ として $x > 0$ のとき $f_k(x) > 0$ となることを示せばよい.

(i) $k = 1$ のとき，$f_1(x) = e^x - (1 + x)$ となるが，$f_1'(x) = e^x - 1 > 0$，$f_1(0) = 0$ であるから $f_1(x) > 0$.

(ii) $k = l$ のとき成立すると仮定する.

$$f'_{l+1}(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{l!}x^l\right)$$

であるから $f'_{l+1}(x) = f_l(x) > 0$. $f_{l+1}(0) = 0$ であるから $f_{l+1}(x) > 0$ となることがわかる. ゆえに, 任意の k に対して $f_k(x) > 0$.

推論の方法

「帰納法」と「演繹法」

帰納法: 個々の現象を観察して一般的命題を確立する

演繹法: 正しい前提から正しく結論を導く．それらを積み重ねていく

Q 数学的帰納法は帰納法か？

A 演繹法である

本日の課題 (その 2)

$\tan 1^\circ$ が無理数であることを示せ。

まとめ

- 「数学と医療」の授業について

  講義＋**課題演習**でやっていきます.

  定期試験を行わないので, 毎回の授業でのパフォーマンスが重視される.

- 数学の基本である「集合」と「論理」のおさらい

  統計学を学ぶことの基礎ともなります.

- 受講方法に慣れよう

  AIDLE-K 中心で動いていきます。プリントをスキャンして提出できましたか？ フィードバックコメントも書いてください.

課題提出

1. AIDLE-K にアクセスし，「0904 課題提出」から提出する.
2. スマホで撮って提出する学生は「ファイルを選択」から写真をとり，「123123.jpg」(学籍番号 6 桁, 半角) と名前をつけて提出する。提出画面では「この状態で提出する」ボタンを押す.
3. Microsoft Lens を使用し PDF に変換する，または PDF ファイルに書き込んで提出する場合は「123123.pdf」(学籍番号 6 桁, 半角) と名前をつけて提出する.

課題**提出期限は** 9 月 7 日 23:59 まで. フィードバックは今日中に.

次回: 「確率」を学びます. 参考図書「医療系のための入門統計」を持参すると良いでしょう. p.23〜p.35 を読んでおきましょう.

Microsoft Lens

iOS の場合

1. Microsoft Lens を起動し，「ドキュメント」モードで撮影する.
2. 枠があっていたら,「確認」をタップする.
3. 「完了」をタップする.
4. 保存先を選ぶ
   (i) 「フォトライブラリ」を選ぶと「写真」アプリに入る.
   (ii) OneDrive をインストールしていると, PDF 変換できる. 保存先で「PDF → OneDrive」を選べば良い
5. 提出する. OneDrive で PDF 変換した場合は「ブラウズ」から「OneDrive」を見つけてアップロードする.