確率

数学と医療・第 2 回

数学・橋本貴宏

2024 年 9 月 11 日 1 限

本日の授業では

- 前回のおさらい
  (1) 命題と論理
  (2) 証明の方法
- 確率
  (1) 確率の定義
  (2) 条件付き確率
  (3) ベイズの定理

前回のおさらい

命題と論理

真 (True) であるか偽 (False) であるかが明確に定まっている文章を**命題**と呼ぶ.

逆・裏・対偶

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{逆}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{裏}"'] \arrow[drr, leftrightarrow, "\text{対偶}" near start] & & \boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{p} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{裏}"] \arrow[dll, leftrightarrow] \\
\neg \boldsymbol{p} \Rightarrow \neg \boldsymbol{q} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{逆}"'] & & \neg \boldsymbol{q} \Rightarrow \neg \boldsymbol{p}
\end{tikzcd}
$$

命題とその命題の対偶は同値である.

証明の方法

- **背理法** $\cdots$ $\boldsymbol{p}$ が偽であると仮定して矛盾が導かれるならば, $\boldsymbol{p}$ が真であることが示される
- **数学的帰納法** $\cdots$ $\boldsymbol{P(1)}$ が真であり, かつすべての自然数に対して, $\boldsymbol{P(k)}$ が正しいとき, $\boldsymbol{P(k+1)}$ が真である $\Rightarrow$ $\boldsymbol{P(n)}$ が, すべての自然数 $\boldsymbol{n}$ に対して真である

(注意: 推論の方法) 「帰納」と「演繹」

帰納法: いくつかの事例から一般法則を導く

演繹法: 正しい前提から正しく結論を導く

Q 数学的帰納法は帰納法か？

A 演繹法である

前回の課題 (その 1)

[1] ド・モルガンの法則 $\neg(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \equiv (\neg \boldsymbol{p}) \vee (\neg \boldsymbol{q})$ を示せ.

解 真理値表は次のようになる

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{p}$	$\neg \boldsymbol{q}$	$\neg(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$	$(\neg \boldsymbol{p}) \vee (\neg \boldsymbol{q})$
$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$

よって $\neg(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \equiv (\neg \boldsymbol{p}) \vee (\neg \boldsymbol{q})$ が示された.

前回の課題 (その2)

[2] $\mathbf{\tan 1^\circ}$ が無理数であることを示せ。

解　「$\mathbf{\tan 1^\circ}$ は有理数である」として矛盾を導こう．2 倍角の公式より

$$\mathbf{\tan 2^\circ = \frac{2\tan 1^\circ}{1-\tan^2 1^\circ}}$$

有理数の有理式なので $\mathbf{\tan 2^\circ}$ は有理数．2 倍角の公式を適用していくと，$\mathbf{\tan 4^\circ}$，$\mathbf{\tan 8^\circ}$，$\mathbf{\tan 16^\circ}$，$\mathbf{\tan 32^\circ}$，$\mathbf{\tan 64^\circ}$ も有理数となる．加法定理より

$$\mathbf{\tan 60^\circ = \tan(64^\circ - 4^\circ) = \frac{\tan 64^\circ - \tan 4^\circ}{1+\tan 64^\circ \cdot \tan 4^\circ}}$$

となるがこれは $\mathbf{\tan 60^\circ = \sqrt{3}}$ が有理数となってしまうので矛盾．ゆえに $\mathbf{\tan 1^\circ}$ は無理数である．

みなさんからのコメント

- 問題が難しかった．課題の正答率はどう評価されるのですか
  まじめに取り組んだと判断できれば，間違っていても減点はしません
- 数学的帰納法が演繹法であるという点が混乱しそうだった
  数学の証明は「演繹法」によりなされます
- ド・モルガンの法則（命題版）の ① で「かつ」「または」に対称性が無いのが変に思いました
  スライドが間違っていました．訂正版に差し替えました
- 選言と連言の説明がわかりにくかった
  「〜のときに限り」はあまり使わない言葉ですね．真理値表を使って説明します
- 課題を写真で撮って提出する際に PDF スキャナーを使うべきですか
  その方が見た目が良いので，できるだけアプリを活用してほしいです

標本空間と事象 (その 1) (p.23)

定義

試行 (trial)⋯ 同じ条件のもとでくり返すことができる実験や観察
標本空間 (sample space) ⋯ 起こりうることがら全ての集合. (全事象ともいう)
事象 (event)⋯ 起こりうることがら
根元事象 (elementary event) ⋯ 起こりうることがらのうちの 1 つ.
空事象 (empty) ⋯ ∅: 何も起こらない

例　サイコロを投げる ⇒ 試行.

1 の目が出る, 偶数の目がでる ⇒ 事象.

標本空間は, $\boldsymbol{k}$ の目が出るという根元事象を $\{\boldsymbol{k}\}$ で表すと,

$$\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}\} = \boldsymbol{U}$$

標本空間と事象 (その 2)

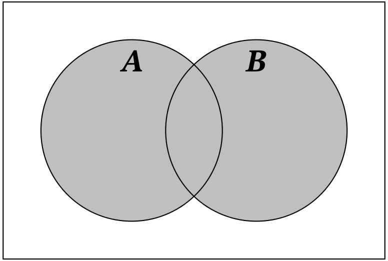
事象 $\boldsymbol{A}$ は標本空間 $\boldsymbol{U}$ の部分集合: $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{U}$. 以下集合の記号を使って書く.

定義

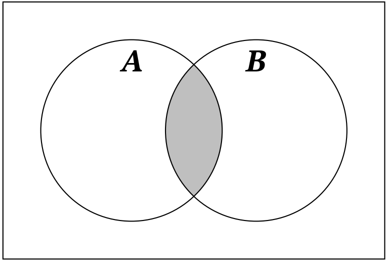
和事象 (union) $\cdots$ $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$

積事象 (intersection) $\cdots$ $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$



$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$



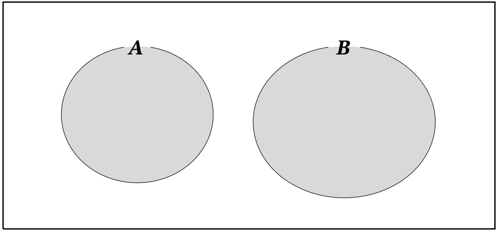
標本空間と事象 (その3)

余事象 (complementary) $\cdots$ $\overline{A}$: A が起こらない, (A^c とも書く)

- **排反事象** (disjoint)

事象 A と事象 B は同時に起こることはない.

例　サイコロを投げて, A: 偶数の目が出る, B: 奇数の目が出る. 集合の記号でかくと, $A \cap B = \emptyset$.



確率の定義 (その 1) (p.26)

サイコロを投げて, 1 が出る可能性はどのくらいであろうか. 確率 (probability) とは起こりやすさのことである. 1 が出る事象を $\boldsymbol{A}$ とかくとき, その確率を $\boldsymbol{P(A)}$ で表す.

数学的確率

もしサイコロに鉛がこめられているような「いかさま」がなければ, どの目がでることもすべて同程度に確からしいと考えられる. よってこの場合は, $\mathbf{1}$ から $\mathbf{6}$ までのすべての目に対して, その目が出る確率は $\mathbf{\frac{1}{6}}$ である. これを**数学的確率**といい,

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{6}}$$

として定義する. $\boldsymbol{n(A)}$: the number of $\boldsymbol{A}$

確率の定義 (その 2)

統計的確率 (経験的確率)

一つのサイコロを何回もなげ, 1 の目が出る回数を調べてみた. $\boldsymbol{n}$ 回サイコロを投げて, $\boldsymbol{r}$ 回 1 の目がでるとき, 割合 $\dfrac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{n}}$ (統計の言葉では**相対度数**という) は $\boldsymbol{n} \to \infty$ のとき一定の値 $(= \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}})$ に近づいていく. これを**統計的確率** という.

- 「同様に確からしい (equally likely)」ならば数学的確率で良い. 場合の数の公式を使って計算すれば良い. 降水確率などの現実的なものについては統計的確率を求めることになる.

確率の性質 (その1)

確率の公理 (axiom)

標本空間を $\boldsymbol{U}$ とする. 事象 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ に対する確率は, 次の性質をみたす. (次をみたすものを確率と定義する)

(I) $\mathbf{0} \leqq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \leqq \mathbf{1}$

(II) $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U}) = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{P}(\emptyset) = \mathbf{0}$

(III) $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset \Rightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})$

いくつかの性質を述べる.

(1) **余事象** $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{A}}) = \mathbf{1}$

(2) **和事象の確率** (加法定理) $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$

確率の性質 (その 2)

(証) (1) $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{A}}$ で $\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{A}} = \emptyset$ より, $\mathbf{1} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{A}})$.

(2) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}}) \cup (\overline{\boldsymbol{A}} \cap \boldsymbol{B})$ と分解できる. 互いに排反なので, 公理 (III) より

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}}) + \boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{A}} \cap \boldsymbol{B}).$$

さらに

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}}),$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{A}} \cap \boldsymbol{B})$$

となるから

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}}) + \boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{A}} \cap \boldsymbol{B}) \\ &= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

条件付き確率 (その1) (p.29)

$\boldsymbol{P(A) \neq 0}$ とする. $\boldsymbol{A}$ が起こったという条件のもとで, $\boldsymbol{B}$ の起こる事象を $\boldsymbol{B|A}$ と書く. このとき, **$\boldsymbol{A}$ が起こったときの $\boldsymbol{B}$ の起こる条件付確率**を

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

で定義する.

積事象の確率 (乗法定理)

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)}$$

$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(B \cap A)}$ により示せる.

条件付き確率 (その2)

例題 1　ある野球チームの試合において, A 投手が先発する確率は $\mathbf{20}\%$, A 投手が先発したときにチームが勝つ確率は $\mathbf{70}\%$ であるという. また, A 投手以外の投手が先発したときにチームが勝つ確率は $\mathbf{45}\%$ であるという. 次の問いに答えよ.

(1) A 投手が先発してチームが勝つ確率を求めよ.
(2) チームが勝つ確率を求めよ.
(3) チームが勝ったことがわかったとき, 先発が A 投手である確率を求めよ.

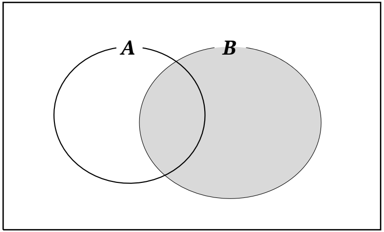
解　$\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{A}$ 投手が先発する,

$\boldsymbol{B}$: チームが勝つ, と２つの事象を定義する

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{5},\ P(B|A) = \frac{7}{10},\ P(B|\overline{A}) = \frac{9}{20}}$$ であるから,

条件付き確率 (その 3)

(1) $P(A\cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{5}\cdot\frac{7}{10} = \frac{7}{50}$.



(2) $B = (A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)$ と分解する．さらに, $(A\cap B)\cap(\overline{A}\cap B) = \emptyset$ であるから

$$P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B) = P(A\cap B) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$
$$= \frac{7}{50} + \frac{4}{5}\cdot\frac{45}{100} = \frac{7}{50} + \frac{18}{50} = \frac{1}{2}$$

(3) 条件付き確率の定義より

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{7}{50}\cdot\frac{2}{1} = \frac{7}{25}.$$

ベイズの定理 (その1)

例題 1 の考え方より, 次のことが導かれる.

$P(B|A)$: A が起こったときの B の起こる条件付確率

A が「原因」で B が「結果」である. $P(B|A)$ は, 「原因」のもとでの「結果」の確率である. これに対して「結果」が出たときの「原因」の確率 $P(A|B)$ を求める公式を導いてみよう.

$P(B|\overline{A})$ は 「A が起こら**なかった**ときの B の起こる条件付確率」である. そして, 乗法公式より

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A), \quad P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P(B|\overline{A}).$$

ここで,

ベイズの定理 (その2)

$$(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset, \quad (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$$

であるから,

$$\begin{aligned} P(B) &= P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) \end{aligned}$$

ここで $P(B) > 0$ として, 条件付確率の式を $P(A|B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(B)}$ と使うことにより,

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})},$$

ベイズの定理 (その 3)

つまり, 条件付確率と,

$P(A)$: **事前確率** (検査前確率: 結果 B が既知でない場合の A の起こる確率) より,

$P(A|B)$: **事後確率** (検査後確率: 結果 B を知った上での A の起こる確率) を導くことができた.

(注) r 個の場合に拡張することができる. A_k $(1 \leqq i \leqq r)$ は排反で, $\bigcup_{i=1}^{r} A_i = U$ とする. このとき, $P(B) > 0$ ならば

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{r} P(A_i)P(B|A_i)} \qquad (k = 1, 2, \cdots, r).$$

ベイズの定理の適用例　(p.35)

ある都市では、住民の $\mathbf{0.5}\%$ がウイルス X に感染している．このウイルス X に関する PCR 検査では偽陰性が $\mathbf{0.1}\%$ ほど起きる．また, 偽陽性は $\mathbf{3}\%$ ほど起きる. この都市の住民 1 人を無作為に選ぶとき, その住民がウイルス X に感染している事象を A, その住民が PCR 検査で陽性と診断される事象を B とする.

偽陰性と偽陽性

ある疾患の診断のための定性テスト (陽性, 陰性で結果を示す検査など) を行った結果は次の表 ($\mathbf{2}\times\mathbf{2}$ 分割表という) によって表すことができる.

	疾患あり	疾患なし
陽性	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$
陰性	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$

$\boldsymbol{a}$: 真陽性 (TP)　$\boldsymbol{b}$: 偽陽性 (FP)

$\boldsymbol{c}$: 偽陰性 (FN)　$\boldsymbol{d}$: 真陰性 (TN)

偽陰性率: $\dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}}$ (疾患ありなのに陰性),　偽陽性率: $\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}}$ (疾患なしなのに陽性)

ベイズの定理の適用例 (つづき)

(1) $\boldsymbol{P(A)}$, $\boldsymbol{P(\overline{A})}$ を求めよ.

$\boldsymbol{P(A) = 0.005}$ (感染率), $\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.995}$,

(2) $\boldsymbol{P(B|A)}$, $\boldsymbol{P(B|\overline{A})}$ を求めよ.

$\boldsymbol{P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{a}{a+c} = 1 - 0.001 = 0.999}$, $\boldsymbol{P(B|\overline{A}) =}$ (偽陽性率) $\boldsymbol{= 0.03}$.

(3) 検査で陽性と診断された人が, ウイルス X に感染している確率を求めよ.

求める確率は $\boldsymbol{P(A|B)}$ であるから, ベイズの定理より

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})} = \frac{0.005 \cdot 0.999}{0.005 \cdot 0.999 + 0.995 \cdot 0.03} \fallingdotseq 0.143.}$$

事象の独立 (その1) (p.31)

$$P(B|A) = P(B) \quad \cdots \quad \text{(条件付けても付けなくても変わらない)}$$

のとき, A と B は独立. そうでない場合は, A と B は従属という. 乗法定理より,

$$A \text{ と } B \text{ が独立} \iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

(この表現にしておくと, $P(A) \neq 0$ の仮定がいらない)

(注) 一般の場合. r 個の事象 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ について, それらの任意個の異なる事象のどのような組合せに対しても

$$P(A_i \cap A_j \cap \cdots \cap A_k) = P(A_i)P(A_j) \cdots P(A_k)$$

が成り立つとき事象 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ は互いに独立であるという.

事象の独立 (その 2)

例題 2　ある大学病院で, $\mathbf{100}$ 人に対してインフルエンザの予防接種についてアンケートを行った. アンケートは全員回答しており, 予防接種を受けた人は $\mathbf{80}$ 人で受けなかった人は $\mathbf{20}$ 人であった. $\mathbf{100}$ 人のうち, インフルエンザに罹った人は $\mathbf{15}$ 人いた. 予防接種を受ける・受けないという事象とインフルエンザに罹る・罹らないという事象が独立であるとき, 予防接種を受けてもインフルエンザに罹る確率を求めよ.

解　$\boldsymbol{A}$: 予防接種を受ける, $\boldsymbol{B}$: インフルエンザに罹る, と事象を定義する.

	B	$\overline{B}$	計
A	12	68	80
$\overline{A}$	3	17	20
計	15	85	100

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{80}{100} \cdot \frac{15}{100} = \frac{12}{100}.$$

このことを $\mathbf{2 \times 2}$ 分割表で表す.

独立 $\iff$ 列の比, 行の比が等しい

2×2 分割表でよく出る用語

	A_1 (疾患あり)	A_0 (疾患なし)
B_1 (陽性)	真陽性 (TP)	偽陽性 (FP)
B_0 (陰性)	偽陰性 (FN)	真陰性 (TN)

感度: $P(B_1|A_1)$　疾患を有する人のうち, 検査結果が陽性である割合

特異度: $P(B_0|A_0)$　疾患を有しない人のうち, 検査結果が陰性である割合

陽性的中率: $P(A_1|B_1)$　検査結果が陽性である人のうち, 疾患を有する割合

陰性的中率: $P(A_0|B_0)$　検査結果が陰性である人のうち, 疾患を有しない割合

陽性尤度比: $\dfrac{P(B_1|A_1)}{P(B_1|A_0)}$　感度を, 偽陽性率で割ったもの; $\dfrac{\text{感度}}{1-\text{特異度}}$

陰性尤度比: $\dfrac{P(B_0|A_1)}{P(B_0|A_0)}$　偽陰性率を, 特異度で割ったもの; $\dfrac{1-\text{感度}}{\text{特異度}}$

ベイズの定理 (国試 110-F010 より)

ある疾患に罹患している検査前確率が $\mathbf{0.1\%}$ と推測される患者に, 感度 $\mathbf{90\%}$, 特異度 $\mathbf{80\%}$ の検査を行う。検査後確率を計算するための $\mathbf{2\times 2}$ 表を示す。

	罹患有: $\boldsymbol{A}$	罹患無 :$\overline{\boldsymbol{A}}$
陽性: $\boldsymbol{B}$	**9**	**1998**
陰性: $\overline{\boldsymbol{B}}$	**1**	**7992**

検査が陽性だった場合の検査後確率を求めよ。

(解) 感度 $\boldsymbol{P(B|A) = 0.9}$, 特異度 $\boldsymbol{P(\overline{B}|\overline{A}) = 0.8}$ で $\boldsymbol{P(B|\overline{A}) = 0.2}$.
$\boldsymbol{P(A) = 0.001}$ であるから

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})} = \frac{0.001\cdot 0.9}{0.001\cdot 0.9 + 0.999\cdot 0.2}}$$

$$\boldsymbol{\fallingdotseq 0.00448.}$$

まとめ

- 確率の定義

  3 つの公理を理解する
- 条件付き確率

  独立性の概念と合わせて理解する
- ベイズの定理

  医療における「診断」と深い関わりがあります.

本日の演習問題

問題

工場 A と工場 B は, ある同じ医療機器を生産していて, 全体のうち 65 % は工場 A で, 35 % は工場 B で生産しているとする。工場 A で不良品を生産してしまう確率を 0.8 %, 工場 B で不良品を生産してしまう確率を 0.6 % とする。ある製品が不良品だったと報告を受けたとき，その製品が工場 B で生産された確率を求めよ。

次回

「確率変数」と「確率分布」をやります．確率と関数が fusion したようなものです．

課題提出

AIDLE-K にアクセスし，「0911 課題提出」から提出する．提出期限は **9/14 23:59** とする．フィードバックは今日中に提出．

注意

- 「名前を書く」「縦書き」「提出時には確認」
- ファイルサイズを小さく，でも見た目もくっきりと
- **過去の課題で出していないものがある場合は，超過でもかまわないので出すこと**