行列 (その2)

数学と医療・第 9 回

数学・橋本貴宏

2024 年 11 月 6 日 1 限

本日の授業では

- 前回のおさらい
  - (1) 行列の定義
  - (2) 行列の演算
- 逆行列
- 連立方程式
- １次変換
- 固有値と固有ベクトル

前回のおさらい (その1)

行列の定義　$\boldsymbol{m \times n}$ 個の数 $\boldsymbol{a_{ij}}$ $(\boldsymbol{i = 1, \ldots, m},\ \boldsymbol{j = 1, \ldots, n})$ を長方形に並べて ( ) で囲んだものを $\boldsymbol{m \times n}$ 型の行列あるいは $\boldsymbol{m \times n}$ 行列という.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & & \cdots\cdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

と書く. 横に並んでいるのが**行**, 縦に並んでいるのが**列**である. $\boldsymbol{i}$ 行 $\boldsymbol{j}$ 列にある $\boldsymbol{a_{ij}}$ を $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ 成分という. $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$ と書くこともある.

行列の和とスカラー倍　$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{ij}})$ のとき $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}})$, $\boldsymbol{kA} = (\boldsymbol{ka_{ij}})$.

前回のおさらい (その 2)

行列の積　A は $m \times n$ 行列, B は $n \times r$ 行列とする. 積 AB は A の列の数と B の行の数が等しいときに定義され, 積は $m \times r$ 行列となる. 積 AB の (i, j) 成分は,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{\Rightarrow} & \boxed{a_{in}} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \boxed{b_{1j}} & b_{1r} \\ \vdots & \boxed{\Downarrow} & \vdots \\ b_{n1} & \boxed{b_{nj}} & b_{nr} \end{pmatrix}$$

のように, 計算され,

$$a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

である.

問題 1 (和とスカラー倍)

問　$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき, 次の計算をせよ。

(1)　$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$　　　　(2)　$2\boldsymbol{B} - 3\boldsymbol{C}$

(解) (1) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+0 & -2+3 \\ 3-1 & -1+4 & 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(2) $2\boldsymbol{B} - 3\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ -2 & 8 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 9 & -3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 12 \\ -11 & 11 & -22 \end{pmatrix}$.

問題 2 (行列の積)

問　次の行列の積を計算せよ.

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(解) (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 - 2\cdot 4 \\ 3\cdot 2 - 1\cdot 1 + 4\cdot 4 \\ 5\cdot 2 + 0 + 6\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 21 \\ 34 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\cdot 5 - 8\cdot 3 & 9\cdot 4 - 8\cdot 2 \\ 7\cdot 5 - 6\cdot 3 & 7\cdot 4 - 6\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 20 \\ 17 & 16 \end{pmatrix}.$

行列の積についての注意

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ のとき,

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

このことからわかること

- 交換法則: $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ は一般には成り立たない
- 「$\boldsymbol{CX} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$ または $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$」 が一般には成り立たない

前回の演習問題 (問題 3)

問題

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ に対して， $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ となる行列 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} & \boldsymbol{w} \end{pmatrix}$ を，

連立方程式

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{bz} = \mathbf{1} & \cdots \text{①} \\ \boldsymbol{cx} + \boldsymbol{dz} = \mathbf{0} & \cdots \text{②} \\ \boldsymbol{ay} + \boldsymbol{bw} = \mathbf{0} & \cdots \text{③} \\ \boldsymbol{cy} + \boldsymbol{dw} = \mathbf{1} & \cdots \text{④} \end{cases}$$

を解くことにより求めよ。ただし $\boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc} \neq \mathbf{0}$ とする。

演習問題の解説

①$\times d -$ ②$\times b$: $(ad-bc)x = d$. $\therefore x = \dfrac{d}{ad-bc}$.

①$\times c -$ ②$\times a$: $(bc-ad)z = c$. $\therefore z = \dfrac{-c}{ad-bc}$.

③$\times d -$ ④$\times b$: $(ad-bc)y = -b$. $\therefore x = \dfrac{-b}{ad-bc}$.

③$\times c -$ ④$\times a$: $(bc-ad)w = -a$. $\therefore w = \dfrac{a}{ad-bc}$.

よって

$$X = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

このとき

$$XA = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

つまり $AX = XA = E$ となり, X は逆行列.

2 次正方行列の逆行列

正方行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ に対して, $\boldsymbol{A}$ の**行列式** $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}$ を $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc}$ とする. このとき $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$ ならば $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} & -\boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ であり, $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ ならば逆行列は存在しない.

(例) $\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ の逆行列を求める. 行列式は $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{4} - \mathbf{2} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{2} \neq \mathbf{0}$ であるから, 逆行列は $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{4} & -\mathbf{2} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ となる. (∵) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{4} & -\mathbf{2} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{4} & -\mathbf{2} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

みなさんからのコメント

★ 行列の定義や行列の積の計算はみなさん分かっているようです

- 難易度はこのままが良いです
  統計よりも, 高校までででやっていたことに近いのがよかったのでしょうか
- 課題も教科書を見ながら、解いて提出させていただきます
  行列についての参考資料は「無料」のものがたくさんネットにあるので,
  利用してください
- 今回の授業では行列の基本的な内容だったので、次回の授業では行列の新しい知識や医療への応用などが学べると期待して次の授業に挑みたいです
  「医療への応用」までいくのはちょっと難しいかも

行列と連立方程式

$\boldsymbol{n}$ 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n} & \boldsymbol{= b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x + \cdots + a_{2n}x_n} & \boldsymbol{= b_2} \\ \cdots\cdots\cdots & = \cdots \\ \boldsymbol{a_{n1}x + \cdots + a_{nn}x_n} & \boldsymbol{= b_n} \end{cases}$$

は, 係数行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n} \end{pmatrix}$ を用いて行列の方程式 $\boldsymbol{Ax = b}$ で表せる.

※ $\boldsymbol{n = 1}$ のとき, $\boldsymbol{ax = b}$ (普通の 1 次方程式). $\boldsymbol{a \neq 0}$ ならば $\boldsymbol{x = a^{-1}c}$.

2元連立1次方程式 ($n = 2$ のとき)

$\begin{cases} ax + by &= \alpha \\ cx + dy &= \beta \end{cases}$ は, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ とおくと, 行列の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}$ となる. もし, A の逆行列 A^{-1} が存在するならば, 方程式に左から A^{-1} をかけて $\boldsymbol{x} = (A^{-1}A)\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{\alpha}$ となる.

例 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$. $\det A = 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = 5 \neq 0$ であるから, 逆行列は存在し $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ となる. 方程式の左から逆行列をかけると, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

クラメルの公式 (その1)

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ の行列式を $|\boldsymbol{A}|$ と書く ($\left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}\right|$ を簡単に $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}$ と書く). $|\boldsymbol{A}| \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{A}$ の逆行列は存在し $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} \boldsymbol{d} & -\boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ であるから,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} \boldsymbol{d\alpha - b\beta} \\ \boldsymbol{-c\alpha + a\beta} \end{pmatrix} \qquad \text{つまり}$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{\alpha d - b\beta}}{\boldsymbol{ad - bc}} = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{A}|}, \quad \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{a\beta - \alpha c}}{\boldsymbol{ad - bc}} = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{\beta} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{A}|}$$

となる. これを**クラメルの公式**という.

クラメルの公式 (その 2)

例題 $\begin{cases} x - y &= 1 \\ 2x + 3y &= 7 \end{cases}$ を, クラメルの公式を使って解け.

(解) $|A| = 5$ であった. よって

$$x = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = \frac{3+2}{5} = 2,\ \ y = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = \frac{7-2}{5} = 1.$$

$n = 3$ のときはどうしたら良いだろうか？

(1) 1 文字消去して変数を 2 つにし, クラメルの公式に持ち込む.

(2) 3 次の行列に対してクラメルの公式を作る.

(3) その他別の方法を考える.

1 次変換 (線形変換)

$\boldsymbol{n}$ 次元のベクトルから $\boldsymbol{n}$ 次元のベクトルへの関数を**変換**という. $\boldsymbol{n}$ 次正方行列と $\boldsymbol{n}$ 次列ベクトルの積は 1 次変換と呼ばれる.

拡大・縮小や回転, およびそれらの合成は 1 次変換である.

(1) $\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1 \cdot 1 + 2 \cdot 0} \\ \mathbf{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$

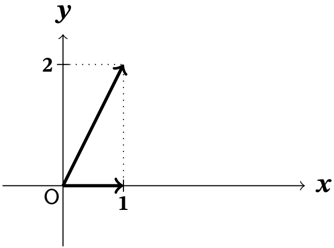
(2) $\boldsymbol{Bx} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0} \\ \mathbf{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$, また,

$\boldsymbol{By} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Bz} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

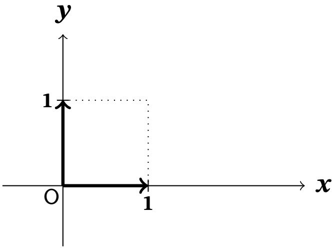
$\boldsymbol{A}$ が**線形**であるとは, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{sx} + \boldsymbol{ty}) = \boldsymbol{sAx} + \boldsymbol{tAy}$ が成り立つことである.

変換の図示

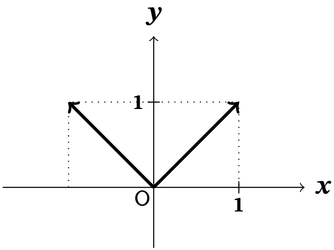
(1)

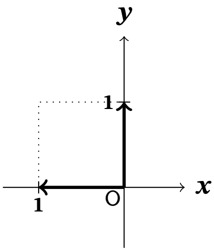


(2)



$\dfrac{\pi}{2}$ 回転





$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$： θ 回転の行列

固有値と固有ベクトル

定義　$\boldsymbol{n}$ 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対し,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$$

をみたす数 $\boldsymbol{\lambda}$ を $\boldsymbol{A}$ の固有値, $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{A}$ の固有値 $\boldsymbol{\lambda}$ に対応する固有ベクトルという. $\boldsymbol{\lambda}$ は実数に限定して考える.

例　$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$ のとき, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ は　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix} = \mathbf{-2}\boldsymbol{x}$

をみたすので, $\mathbf{-2}$ は $\boldsymbol{A}$ の固有値で, $\boldsymbol{x}$ は固有値 $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{-2}$ に対応する $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルである.

- $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを $\boldsymbol{A}$ で変換したときは, もとのベクトルと平行になる.

計算例 (その1)

(例題) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(解) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{E}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ を変形すると $(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

$$(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \left[\begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}\right]\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \lambda - \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-1} & \lambda + \mathbf{1} \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

$\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ の逆行列が存在すると, $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となってしまうので, 行列式は $\mathbf{0}$ とならなければならない.

$$\mathbf{det}(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-1} & \lambda + \mathbf{1} \end{vmatrix} = (\lambda - \mathbf{2})(\lambda + \mathbf{1}) - \mathbf{4} \cdot \mathbf{1} = \lambda^{\mathbf{2}} - \lambda - \mathbf{2} - \mathbf{4}$$

計算例 (その 2)

$$= (\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0.$$

ゆえに固有値は, $\lambda = -2,\ 3$.

$\lambda = -2$ に対応する固有ベクトルを求めるには,

$$\begin{pmatrix} \boxed{-2} - 2 & -4 \\ -1 & \boxed{-2} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよい, 2 つの方程式は同値で, $-x_1 - x_2 = 0$ となる. この方程式の解は 1 つに定まらない. $x_2 = -x_1$ を満たす x_1, x_2 が解となる. その場合の解は, $x_1 = c_1$ とおき, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(c_1 \neq 0)$ と表される.

計算例 (その3)

$\lambda = 3$ に対応する固有ベクトルも, 連立方程式

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} - 2 & -4 \\ -1 & \boxed{3} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解が $x_1 = 4x_2$ を満たすすべての実数であることより求める. この場合はパラメータを $x_2 = c_2$ とおくことにより, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(c_2 \neq 0)$ となる.

- $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ を確認せよ.

まとめ

- 行列の応用

  連立 1 次方程式を解くことにより, 様々な現象のシミュレーションを行うことができる. 医学のなかでは, 塩基配列の解析などで現れる

- 1 次変換

  あるベクトルを, 行列により別のベクトルに写す. 医用画像 (CT など) に用いられる.

- 固有値と固有ベクトル

  行列の「特徴」がわかる. 統計学では主成分分析や因子分析で用いられる

本日の演習問題

連立１次方程式

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = -3 \\ x - 3y - 2z = -1 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

を解け。

ヒント (3 次正方行列の行列式)

行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{pmatrix}$ の行列式は次の式で表される.

$$|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{a}_{11} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix} - \boldsymbol{a}_{12} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix} + \boldsymbol{a}_{13} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} \end{vmatrix}.$$

これより,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

ヒント (3 次正方行列の逆行列)

$|\boldsymbol{A}| \neq \boldsymbol{0}$ のとき, 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{pmatrix}$ の逆行列は次の式で表される.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{1}}{|\boldsymbol{A}|} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}. \qquad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-3} \\ \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{2} \end{pmatrix}$$

とすると, 方程式の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$ で求められる.

次回

微分方程式をやります．自然科学，社会科学や医学に現れる現象は，微分方程式で記述することができます．

課題提出

AIDLE-K にアクセスし，「1106 課題提出」から提出する．提出期限は **11/9 23:59** とする．フィードバック (今日中) も忘れずに．

注意

- ファイル形式に注意し，拡張子をつける (jpg, pdf 等)
- 解答用紙にも名前を書くこと
- **過去のプリントで出していないものがある場合は，超過でもかまわないので出すこと**