

ポアソン分布について

ポアソン分布は、二項分布 $B(n, p)$ において $np = \lambda$ (一定) とおいて $n \rightarrow \infty$ としたものと考えられる。

(証) 二項分布の確率は

$${}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

と書ける。また、

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-x)!n^x} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n \cdot n \cdots n} \\ &= 1\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \rightarrow 1^x = 1 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

であり、 $\mu = -\frac{\lambda}{n}$ とおくことにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}} = \lim_{\mu \rightarrow 0} (1 + \mu)^{\frac{1}{\mu}} = e$$

であるから (数 III の教科書を見よ),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}} \right\}^{-\lambda} = e^{-\lambda}.$$

ゆえに

$${}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \rightarrow \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad (n \rightarrow \infty)$$

でポアソン分布に近づく。

二項分布の期待値は np , 分散は $np(1-p)$ であったから、ポアソン分布の期待値は $np = \lambda$ で、期待値は ($n \rightarrow \infty$ のとき $p = \frac{\lambda}{n} \rightarrow 0$ より) $np \cdot 1 = \lambda$ となる。このことを定義式から直接求めてみよう: $p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ とおく。

$$p(x) = \frac{\lambda}{x} \cdot \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{x} p(x-1)$$

であるから、

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x p(x) = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \lambda, \\ E(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} [x(x-1) + x] \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} e^{-\lambda} + \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} e^{-\lambda} = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

ゆえに $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda$.