

行列 (その1)

数学と医療・第 8 回

数学・橋本貴宏

2024 年 10 月 30 日 1 限

本講義資料の無断使用・無断転載・SNS 等への投稿を固く禁じます

本日の授業では

- 前回のおさらい
 - (1) 標本分布
 - (2) Excel の利用
- 行列
 - (1) 行列の定義
 - (2) 行列の和とスカラー倍
 - (3) 行列の積と逆行列

前回のおさらい (その1)

標本分布は推定・検定などの推測統計で用いられる確率分布であり, 次の3つが代表的である.

(1) χ^2 分布

母分散の推定および適合度・独立性の検定に使われる.

(2) t 分布

正規母集団の母分散が未知のとき, **母平均**の区間推定や検定, 2つの正規母集団の母分散が等しいときの**母平均の差**の検定に使われる.

(3) F 分布

2つの正規母集団における**母分散の間に差**があるかどうかを検定するときに使われる.

前回のおさらい (その2)

標本分散, 不偏分散に関する分布

正規母集団からの標本の不偏分散 U^2 (あるいは S^2) は χ^2 分布に従う.

★ このことは, 今後学ぶ区間推定, 仮説検定において重要な役割を果たす.

定理 $X_1, X_2, \dots, X_n$ を $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本とするとき,

(1) 標本平均 $\bar{X}$ と $SS = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ (偏差平方和) は独立

$$(2) \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)U^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

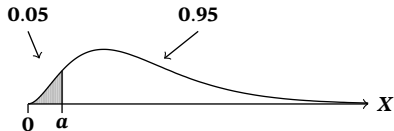
• $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \bar{X}$ という関係式があるので, 自由度が 1 減っている.

前回の演習問題 (その1)

(1) 確率変数 X が自由度 6 の χ^2 分布に従うとき, $P(Z < a) = 0.05$ となる a の値を求めよ。

(解) 下側 5% は上側 $100 - 5 = 95\%$ だから, χ^2 分布表で $\alpha = 0.95$, $n = 6$ のところを見る. $a = 1.635$.

Excel の関数 **CHISQ.INV** (0.05, 6) = 1.6354 (左側確率). 右側確率を使う **CHISQ.INV.RT** もある. **CHISQ.INV.RT** (0.95, 6) = 1.6354.



前回の演習問題 (その2)

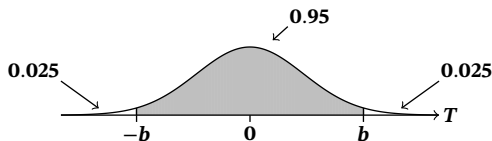
(2) 確率変数 T が自由度 13 の t 分布に従うとき, $P(|T| < b) = 0.95$ となる b の値を求めよ。

(解) $P(|T| \geq b) = 1 - 0.95 = 0.05$ なので, 山の左右に 0.025 ずつある. t 分布表で $\alpha = 0.025$, $n = 13$ のところを見て, $b = 2.160$.

Excel の関数

(i) 左側確率 $0.95 + 0.025$ より $\text{T.INV}(0.975, 13) = 2.1604$

(ii) 「両側確率」ならある. $\text{F.INV.2T}(0.05, 13) = 2.1604$



前回の演習問題 (その3)

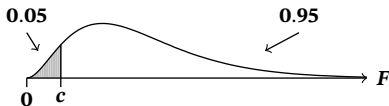
(3) 確率変数 F が自由度 $(8, 9)$ の F 分布に従うとき, $P(F < c) = 0.05$ となる c の値を求めよ。

(解) 自由度 $(8, 9)$ の F 分布の上側 95% 点を求めれば良い。

$F_{0.95}(8, 9) = \frac{1}{F_{0.05}(9, 8)}$ であるから, F 分布表 (上側 5% 点) で, $m = 9, n = 8$

のところを見て, $d = \frac{1}{3.39} \doteq 0.295$.

Excel の関数 $\text{F.INV}(0.05, 8, 9) = 0.2951$



Excel の関数

分布	Excel の関数
正規分布	NORM.DIST(x , 平均, SD, TF)
正規分布の累積分布関数の逆関数	NORM.INV(確率, 平均, SD)
χ^2 分布	CHISQ.DIST(x , 自由度, TF)
左側 t 分布の値	T.DIST(x , 自由度, TF)
F 分布の (左側) 確率	F.DIST(x , 自由度 1, 自由度 2, TF)
χ^2 分布の左側確率の逆関数	CHISQ.INV(確率, 自由度)
t 分布の左側確率の逆関数	T.INV(確率, 自由度)
F 分布の左側確率の逆関数	F.INV(確率, 自由度 1, 自由度 2)

- TF: 関数形式. T (True) は累積, F (False) は密度関数
- 関数の後に .RT を付けると上側 (右側) 確率になる
- 正規分布で NORM.S. とすると標準正規分布になる

みなさんからのコメント

★ 「3つともそれなりに分かった」が 69%

- Excel を使いこなせるようになると課題をととても楽に解くことができると思った
手計算のステップを超えたので、これからは Excel でいきましょう
- 教科書でも間違っていることがあるのだとわかった
間違っているというか、本によって言葉の使い方が違うということです
- この辺の範囲から早く抜け出したい
やっていることが難しかったでしょうか。3 学期になって意味がわかります
- 計算ばかりをしていて難しかったり、嫌になったりすることがありますが、医療
における役割を調べることで、それらを学ぶ意欲が湧いてきました
講義では「検定」にからめて話をしましたが、その目的を話した方が良かった
ということがわかりました

ベクトル

スカラー (scalar): 実数あるいは複素数.

ベクトル (vector): $(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_m)$ (行ベクトル), $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ (列ベクトル) のように,

順序をもって縦または横に並べられた数の組で, 次の和とスカラー倍が定義できるもの.

$$\text{和: } \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n \end{pmatrix} \quad (2) \text{ スカラー倍: } \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \lambda \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

高校では $\vec{a}$ と矢印でベクトルを表したが, 太字 $\mathbf{a}$ で表すことも多い

行列

次の2つの表は、あるクラスの学生の1学期と2学期の成績をまとめたものである。

1学期	国語	数学	英語	理科
Aさん	66	80	75	71
Bさん	82	65	92	66
Cさん	71	91	84	83

2学期	国語	数学	英語	理科
Aさん	72	80	72	66
Bさん	84	66	80	69
Cさん	73	90	88	85

これらの表の数の並びを

$$A = \begin{pmatrix} 66 & 80 & 75 & 71 \\ 82 & 65 & 92 & 66 \\ 71 & 91 & 84 & 83 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 72 & 80 & 72 & 66 \\ 84 & 66 & 80 & 69 \\ 73 & 90 & 88 & 85 \end{pmatrix}$$

と () で囲んだものを行列という。行列は大文字アルファベットで表す。

行列の一般的な定義

$m \times n$ 個の数 a_{ij} ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) を長方形に並べて () で囲んだものを $m \times n$ 型の行列あるいは $m \times n$ 行列という.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- 行列の 1 つ 1 つの数を成分といい、横に並んでいるのが行、縦に並んでいるのが列である

と書く. 先ほどの成績表は 3×4 行列である.

- i 行 j 列にある成分を (i, j) 成分という.
- $1 \times m$ 行列を m 次行ベクトル, $n \times 1$ 行列を n 次列ベクトルという.
- 2 つの行列 A, B の型が同じで, 対応するすべての成分が等しいとき, A と B は等しいといい, $A = B$ と書く.

いろいろな行列 (その1)

- すべての成分が **0** である行列を**零行列**といい, **0** で表す.
- 行と列の数が等しい行列を**正方行列**という. $n \times n$ 行列を n 次正方行列と

いう. (例) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ は 3 次正方行列

- n 次正方行列において, 左上から右下の対角線上の n 個の成分を**対角成分**という. 対角成分以外がすべて **0** である行列を**対角行列**という.

(例) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は対角行列

いろいろな行列 (その2)

- 対角成分がすべて 1 である対角行列を単位行列といい, E で表す.
- 行列 A の行と列を入れ替えた行列を, A の転置行列といい, tA で表す.

(例) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ のとき, ${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. また, ${}^t({}^tA) = A$ である.

- ${}^tA = A$ をみたす行列を対称行列という.

(例) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ のとき, ${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ であるから A は対称行列である.

行列の和とスカラー倍 (その1)

行列の和は成分同士の和である. 例えば先ほどの成績表の例では

$$A + B = \begin{pmatrix} 66 & 80 & 75 & 71 \\ 82 & 65 & 92 & 66 \\ 71 & 91 & 84 & 83 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 72 & 80 & 72 & 66 \\ 84 & 66 & 80 & 69 \\ 73 & 90 & 88 & 85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 138 & 160 & 147 & 137 \\ 166 & 131 & 172 & 135 \\ 144 & 181 & 172 & 168 \end{pmatrix}$$

のように, 1 学期と 2 学期の合計得点が求まる (この行列を C とおく). 1 学期と 2 学期の平均点を求めるには, この行列の全ての成分を $\frac{1}{2}$ 倍すればよい.

$$\frac{1}{2}C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 138 & \frac{1}{2} \cdot 160 & \frac{1}{2} \cdot 147 & \frac{1}{2} \cdot 137 \\ \frac{1}{2} \cdot 166 & \frac{1}{2} \cdot 131 & \frac{1}{2} \cdot 172 & \frac{1}{2} \cdot 135 \\ \frac{1}{2} \cdot 144 & \frac{1}{2} \cdot 181 & \frac{1}{2} \cdot 172 & \frac{1}{2} \cdot 168 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & 80 & 73.5 & 68.5 \\ 83 & 65.5 & 86 & 67.5 \\ 72 & 90.5 & 86 & 84 \end{pmatrix}$$

行列の和とスカラー倍 (その2)

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ に対して

(1) 和を, $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$

(2) スカラー倍を $kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$ と定義する.

※ 差は, $A - B = A + (-1)B$ と考える.

行列の和とスカラー倍 (その3)

例 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 3+4 \\ 2+1 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 & 4-3 & 6-(-5) \\ 1-2 & -3-0 & 1-4 \\ 2-(-5) & 0-1 & -1-3 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 11 \\ -1 & -3 & -3 \\ 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$

(3) $3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}.$

問題 1 (和とスカラー倍)

問 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき, 次の計算をせよ。(答案用紙に書く)

(1) $A + B$

(2) $2B - 3C$

行ベクトルと列ベクトルの積

n 次行ベクトル $A = (a_1 \ \cdots \ a_n)$ と n 次列ベクトル $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ の積を次のように定義する.

$$AB = (a_1 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \quad (n \text{ 次の内積})$$

(例) $A = (1 \ 2), B = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ のとき, $A = (1 \ 2) \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) = -2$

※ A の列の数と B の行の数が等しくないと, 積は定義されない.

行列と列ベクトルの積

$m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ と n 次列ベクトル $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ の積を次のように定義する.

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + \cdots + a_{1n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + \cdots + a_{mn}b_n \end{pmatrix}$$

$$(\text{例}) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 \\ 7 \cdot 3 + 8 \cdot (-2) + 9 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

※ 行ベクトルと列ベクトルの積を 3 つ並べたものと考えれば良い

行列の積 (その1)

A を $m \times n$ 行列, B を $n \times r$ 行列とする. A の列の数と B の列の数が等しいので積 AB は定義されて, AB は $m \times r$ 行列となる. A, B の (i, j) 成分をそれぞれ a_{ij}, b_{ij} とすると, AB の (i, j) は

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

である.

(例) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ とすると, A の第1行は $(2 \ -3)$, B の第1列は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから AB の $(1, 1)$ 成分は

$$2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 = 2.$$

行列の積 (その2)

他の成分も同様に計算されて,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 & 2 \cdot 5 + (-3) \cdot (-4) \\ 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 4 \cdot 5 + (-4) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 22 \\ 4 & 24 \end{pmatrix}$$

2×2 行列同士の積

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ の積 AP は

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}.$$

A の2つの「行ベクトル」と B の2つの「列ベクトル」の内積 (組み合わせは4つある) を並べたものとなっている.

行列の積 (その3)

$$(例) \quad (1) \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 9 \cdot 5 \\ -6 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 & 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 13 & 18 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 6 & 5 & -4 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 6 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 & 6 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 & -1 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & -10 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$$

問題 2 (行列の積)

問 次の行列の積を計算せよ. (答案用紙に書く)

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

逆行列

正方行列 A に対して $AX = XA = E$ をみたす X が存在するとき, A は正則であるという. このとき X は唯一つに定まるので, $X = A^{-1}$ で表し, A の逆行列という.

- 唯一つに定まることをいうには, 「2つあるとして, その2つが実は一致すること」をいえば良い.

(証) B, C が上の式をみたすとする,

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

- n 次正方行列の逆行列を求めるには, $n \times n$ 元連立一次方程式を解く必要がある.

本日の演習問題 (問題 3)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, $AX = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ を,
連立方程式

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \\ ay + bw = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}$$

を解くことにより求めよ。ただし $ad - bc \neq 0$ とする。

まとめ

- 行列

数を $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ のように長方形に並べたもの. 行はヨコ, 列はタテ.

- 行列の積

積 AB の (i, j) 成分は, $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \Rightarrow & a_{in} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1j} & b_{1r} \\ \vdots & \Downarrow & \vdots \\ b_{n1} & b_{nj} & b_{nr} \end{pmatrix}$ のように, 左はヨコに動き, 右はタテに動く.

次回

行列のつづきをやります. AIDLE-K にある「行列入門」を読んでおいてください.

課題提出

AIDLE-K にアクセスし, 「1030 課題提出」から提出する. 提出期限は **11/3 23:59** とする. フィードバック (今日中) も忘れずに.

注意

- ファイル形式に注意し, 拡張子をつける (jpg, pdf 等)
- 解答用紙にも名前を書くこと
- **過去のプリントで出していないものがある場合は, 超過でもかまわないので出すこと**