

微分方程式

数学と医療・第 10 回

数学・橋本貴宏

2024 年 11 月 13 日 1 限

本講義資料の無断使用・無断転載・SNS 等への投稿を固く禁じます

本日の授業では

- 前回のおさらい
行列の応用
 - (1) 連立方程式
 - (2) 1 次変換
 - (3) 固有値と固有ベクトル
- 微分方程式

前回のおさらい (その1)

連立 1 次方程式 n 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots = \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

は, 係数行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ とベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ を用いて行

列の方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ で表せる. A の行列式 $\det A \neq 0$ ならば, 方程式の解はただ一つ存在して $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

前回のおさらい (その2)

固有値と固有ベクトル n 次正方行列 A に対し,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$$

をみたす数 λ を A の固有値, $\mathbf{x}$ を A の固有値 λ に対応する固有ベクトルという.

- A の固有ベクトルを A で変換したときは, もとのベクトルと平行になる.

固有値と固有ベクトルは, 数学では行列を対角化し, n 乗を計算することなどに使われる. 統計学 (データサイエンス) では主成分分析 (次元削減) などに使われる.

前回の演習問題

連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = -3 \\ x - 3y - 2z = -1 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

を解け。

• 係数行列を, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とすると, $A\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}$

という行列の方程式で表すことができる.

逆行列による解法 (その1)

3 次正方行列の行列式は,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

これより,

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (-4) - 2 \cdot (-2) - (-5) = 1. \end{aligned}$$

3 次正方行列の逆行列

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の余因子行列 $\tilde{A}$ を次で定義する.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

このとき, $|A| \neq 0$ ならば $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$ である.

逆行列による解法 (その2)

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -7 \\ 2 & 2 & 3 \\ -5 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\mathbf{x} = A^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -4 & -5 & -7 \\ 2 & 2 & 3 \\ -5 & -6 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + 5 - 14 \\ -6 - 2 + 6 \\ 15 + 6 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Excel の関数

演算	Excel の関数
和	成分ごとに足してコピー
積	MMULT(左の行列, 右の行列)
行列式	MDETERM(行列)
逆行列	MINVERSE(行列)
ベクトルの内積	SUMPRODUCT(配列 1, 配列 2)

(積の計算)

2

×

✓

f_x

=MMULT(A2:B3,C2:D3)

A	B	C	D	E	F	G
行列A		行列B			行列の積	
9	-8	5	4		21	20
7	-6	3	2		17	16

掃き出し法

3元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3 \end{cases}$$

は, 係数行列 A と右辺のベクトル $\mathbf{d}$ を用いて行列の方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ で表せる.
 A と $\mathbf{d}$ を横に並べたもの

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{pmatrix}$$

を, 拡大係数行列といい, $(A|\mathbf{d})$ で表す.

$1 \leq i, j \leq 3, i \neq j, c \neq 0$ とする. 拡大係数行列 $(A|\mathbf{d})$ に対して

(I) 第 i 行の c 倍を第 j 行に加える

(II) 第 i 行と第 j 行を入れ替える

(III) 第 i 行を c 倍する

の3種類の操作を施すことを行基本変形という. これは同値な変形である. A の部分を単位行列に変形, つまり $(E|\mathbf{d}')$ の形にすれば, $\mathbf{x} = \mathbf{d}'$ が方程式の解となる.

※ 単位行列まで変形しなくても,
階段行列という行列まで変形すれば十分

(例)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

掃き出し法による解答 (その1)

方程式は
$$\begin{cases} 2x + 2y - z = -3 \\ x - 3y - 2z = -1 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases} \quad \text{であるから,}$$

拡大係数行列は,
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{となる.}$$

$$\text{(i)} \leftrightarrow \text{(ii)} : \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{(ii)} + \text{(i)} \times (-2) \\ \text{(iii)} + \text{(i)} \times 2 \end{matrix} : \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

掃き出し法による解答 (その2)

$$\rightarrow \begin{array}{l} \text{(ii)} \times 2 \\ \text{(iii)} \times 3 \end{array} : \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 16 & 6 & -2 \\ 0 & -15 & -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{(ii)} + \text{(iii)} : \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -15 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{(iii)} + \text{(ii)} \times 15 : \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ y = -2 \\ -6z = -30 \end{cases}$$

これより, $y = -2$, $z = 5$, $x = 3y + 2z - 1 = 3$.

※ 行列の次数が大きくなるのに従い, 行列式の計算の計算量が飛躍的に増大するので, 掃き出し法の方が有利である.

みなさんからのコメント

- 行列なんか使わなくても問題は解けそう
行列使った方が良い問題はちょっとレベルが高い
- クラメルの公式が覚えづらいので、消去法で解いていきたい
本来はきれいな形をしていて覚えやすいのですが.
- 行列がどんな時に使うものかがいまいちわからない
同じ成分数のベクトルを並べれば行列になります. 1次元×1次元で行列になるのです. 縦×横のものとして考えると, 先週情報学でやった「肺のX線画像」は, **64×64** の行列とみなせます.
連立微分方程式も行列を使って記述できます

これからの「微分方程式」の講義では

生命現象を微分方程式によって表現した「数理モデル」を，数学的に，あるいはコンピュータなどを用いて解いていく．3回の講義を次のように行う

(1) 基礎理論を学ぶ.

高校で学んだ「微分・積分」を復習し，簡単な微分方程式を解く

(2) 薬の吸収

- モデルについて
- 血中濃度の時間変化を調べる

(3) 感染症の数理モデル

- 感染症の数理モデルを紹介
- 数学的に解く
- コンピューターを用いて感染症モデルをシミュレーションする

感染症モデル (SIR モデル) の方程式

Kermack-McKendrick (1927) が提唱した **SIR** モデル

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \end{cases}$$

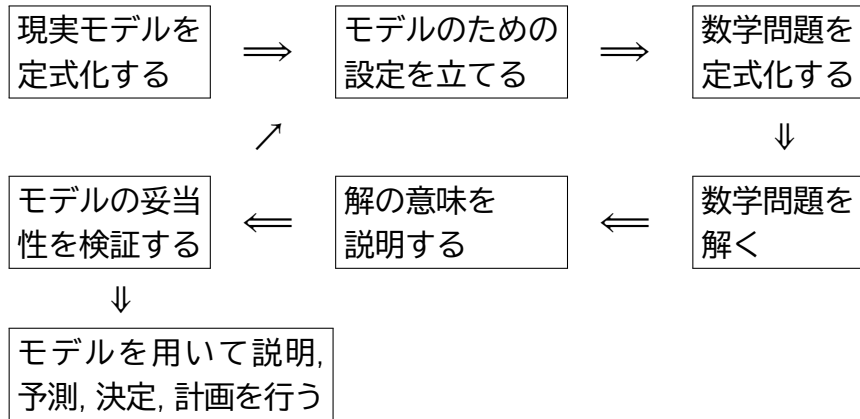
β : 伝達係数
(transmission coefficient)
 γ : 回復率 (隔離率)

$S(t)$ (Susceptible): 感受性 (免疫のない非感染) 人口密度

$I(t)$ (Infectious): 感染性人口密度

$R(t)$ (Recovered): 回復人口密度

数理モデル



- 「数学問題を解く」ことが中心である.

微分方程式

独立変数 x と関数 $y = y(x)$ およびその導関数 $y', \dots, y^{(n)}$ の間の関係式

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

を n 階微分方程式という.

微分方程式 (1) をみたす関数 $y = y(x)$ を解とよび, 解を求めることを微分方程式 (1) を解くという.

求積法: 積分することにより, 解を求めること

微分方程式の解

一回積分すると任意定数が 1 つ出てくる. n 階微分方程式の解は n 個の定数を含む.

- n 個の任意定数を含む解を一般解という.
- 任意定数に数値を代入して得られる解を特殊解という.
- 一般解でも特殊解でもない解を特異解という.

• $x = x_0$ において,

$$y(x_0) = y_0$$

なる値を与えて解く問題を初期値問題という.

変数分離形

$g(x)$ は x のみ, $h(y)$ は y のみの関数で, $h(y) \neq 0$ とする.

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \quad (g(x) \equiv 0 \text{ の場合は } y = (\text{定数}) \text{ が解となる})$$

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x)$$

と変形する. 左辺も x の関数であるから両辺を x で積分する.

$$\int \frac{1}{h(y(x))} y'(x) dx = \int g(x) dx$$

左辺は, 置換積分法により $\int \frac{dy}{h(y)}$ となり, 両辺の積分をそれぞれ計算することにより一般解が得られる.

「成長」と「減衰」の方程式 1

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad (k : \text{定数})$$

を初期条件 「 $x = x_0$ のとき $y = y_0$ 」 で解く.

まず, $y = 0$ のときは $y \equiv 0$ が解となることに注意し, $y \neq 0$ とする. $\frac{y'}{y} = k$ の両辺を x で積分すると,

$$\log |y| = kx + C$$

C は定数, であり

$$|y| = e^{kx+C} = e^C e^{kx}$$

となる. $y = \pm e^C e^{kx}$ となるが, $A = \pm e^C$ とおくと, 一般解は

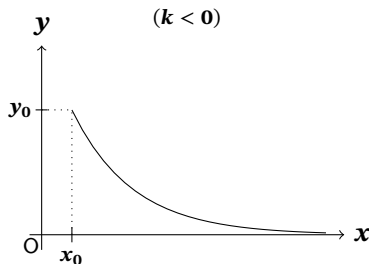
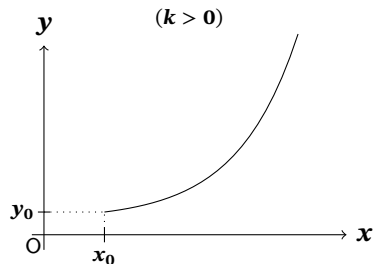
$$y = Ae^{kx}$$

「成長」と「減衰」の方程式2

となる. ここで, $x = x_0$ のとき $y = y_0$ であるから $y_0 = Ae^{kx_0}$ より $A = y_0e^{-kx_0}$ となり, 初期条件をみたす解は

$$y = y_0e^{k(x-x_0)}$$

となる.



例題 (その1)

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y$$

を, 初期条件 「 $x = 0$ のとき $y = 2$ 」 のもとで解け.

解 $\frac{1}{y-1} \frac{dy}{dx} = -1$ と変形して, 両辺を x で積分すると,

$$\log |y - 1| = -x + C$$

(C は定数) である. $|y - 1| = e^C e^{-x}$ となるので, 例と同様に $y - 1 = A e^{-x}$ となる. ここで, $x = 0$ のとき $y = 2$ であるから $A = 1$ となる.

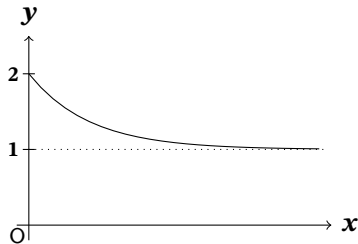
例題 (その2)

よって初期条件をみたす解は

$$y = 1 + e^{-x}$$

となる.

グラフ:



増大を抑制する (その1)

$$(A) \quad \frac{dy}{dx} = ky \quad (k > 0), \quad y(0) = y_0$$

を解くと,

$$y = y_0 e^{kx}$$

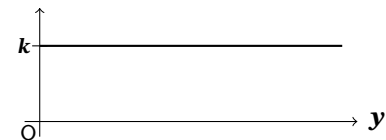
となる. $k > 0$ なので指数関数的に増大することになる (cf. マルサスの人口モデル). しかしながらそれは非現実的である. フェルフルストは増大を抑制する項を付けた, 次のような方程式を提唱した

$$(B) \quad \frac{dy}{dx} = ky(M - y) \quad (0 < y < M)$$

y が M に近づくにつれて, $M - y$ が 0 に近づくので, 増加率が 0 に近づくのである.

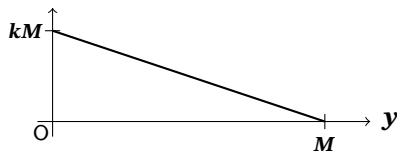
増大を抑制する (その2)

増加率



(A) 増加率一定

増加率 (y の係数)



(B) y が増えると増加率は減少

(問題) (B) において $k = M = 1$ とした微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y(1 - y)$$

初期条件 「 $x = 0$ のとき $y = \frac{1}{2}$ 」 で解け.

※ 方程式 (B) はロジスティック方程式と呼ばれる.

ロジスティック方程式を解く

方程式を変数分離すると, $\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dx$ となる. $0 < y < 1$ に注意すると左辺の積分は

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right) dy = \log y - \log(1-y)$$

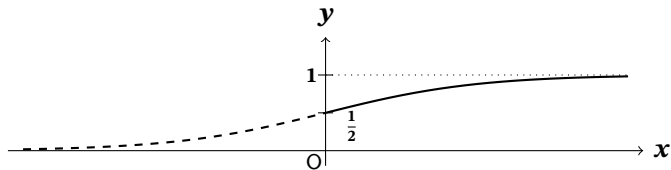
となるから $\log \frac{y}{1-y} = x + C$. 初期条件より $x = 0$ のとき $y = \frac{1}{2}$ なので,

$\log 1 = 0 = C$. $\frac{y}{1-y} = e^x$ より $\frac{1-y}{y} = \frac{1}{y} - 1 = e^{-x}$ で

$y = \frac{1}{1+e^{-x}}$ となる. この関数をシグモイド関数という.

シグモイド関数のグラフ

$y' = y(1 - y) > 0$, $y'' = \frac{d}{dx}(y - y^2) = \frac{d}{dy}(y - y^2) \frac{dy}{dx} = (1 - 2y)y(1 - y)$ より,
 $y'' = 0$ となるのは $y = \frac{1}{2}$, すなわち $x = 0$ のとき.



ロジスティック (シグモイド) 関数の応用

- ロジスティック回帰分析
- ニューラルネットワークにおける活性化関数

まとめ

- 微分方程式

関数とその導関数を含む方程式. 自然現象を記述する

- 微分方程式の解法

積分することにより, 解を求める求積法のうち, 変数分離による解法を学んだ.

- ロジスティック方程式

$y' = ky$ ($k > 0$) の解は, 指数関数的に増大する. それを抑制する項をつけると, 「頭打ち」にすることができる

本日の課題

問題

核医学検査で用いられる, 放射性同位体テクネチウム 99m の時刻 t での放射能を $N(t)$ とすると, $N(t)$ は k を正の定数として微分方程式

$$N'(t) = -kN(t)$$

をみたす。

時刻 $t = 0$ での放射能を 1 とする。テクネチウム 99m の半減期, すなわち, 放射能が半分になる時刻を k を用いて表せ。

次回

薬の吸収をやります。薬理学に出てくる「薬物動態」の基礎理論になっています。

課題提出

AIDLE-K にアクセスし、「1113 課題提出」から提出する。提出期限は **11/16 23:59** とする。フィードバック (今日中) も忘れずに。

注意

- ファイル形式に注意し、拡張子をつける (jpg, pdf 等)
- 解答用紙にも名前を書くこと
- **過去のプリントで出していないものがある場合は、超過でもかまわないので出すこと**